Analyse I

القصف الجامعي
التشغيل الذاتي
INDH

UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAÂDI
École nationale des sciences appliquées
Al Hoceima

جامعة عبد المالك السعدي
Université Abdelmalek Essaâdi

Module: Analyse Réelle (AP12)
CP 1ère année

Année 2018/2019
Semestre : 1

Contrôle continu d'Analyse

Exercice 1 (8 points) (**Questions de cours**)
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que : $M = \sup(A)$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : M - \varepsilon < a \leqslant M$
   (b) Montrer que $\inf(-A) = -\sup(A)$
2. Soient (v_n) une suite croissante et (w_n) une suite décroissante telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - w_n) = 0$.
   (a) Montrer que (v_n) et (w_n) sont convergentes et ont la même limite ?
   (b) Application : on pose $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $w_n = v_n + \frac{1}{n.n!}$.
   Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes vers une limite e
   (c) En déduire que le nombre e est irrationnel

Exercice 2 (6 point)
On considère l'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}; (n, m) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star\right\}$.

1. Montrer que A est borné
2. Déterminer $\max(A)$
3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\exists((n_0, m_0) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ tel que : $0 < \frac{1}{n_0^2} + \frac{1}{m_0^2} < \frac{1}{k}$
4. En déduire que $\inf(A) = 0$

Exercice 3 (6 points)
Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite convergeant vers un réel l. On pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}.$$

1. Montrer que la suite (v_n) converge également vers l
2. La réciproque est elle-vraie ?
3. Application : déterminer la limite de la suite (v_n) définie par : $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k+1}{n^2 k}}$